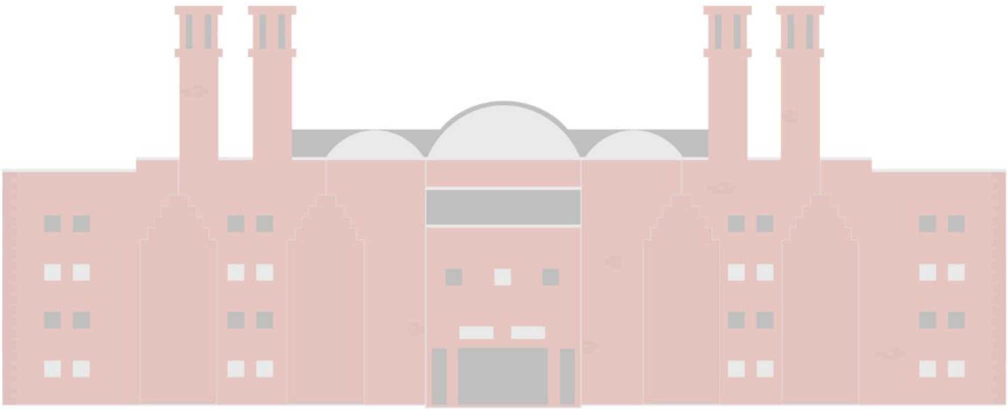
التَحليل العَددِي

المحاضرة السادسة

5 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/٢٢

طريقة تنصيف المجال:

$|R - x_n| \le \frac{b-a}{2x+1}$ حيث: R: الحل الفعلي للمعادلة $f(x) = 0$

X_n: التقريب في الخطوة n للحل

مثال: لو كان لدي المعادلة التالية: $f(x) = xsinx - 1$ على المجال [0,2].

$$f(0) = -1.0000 \quad , \quad f(2) = 0.818595$$

ملاحظة : حيثما يرد تابع مثلثي فإن الحساب سيكون بال Rad.

ومن خلال اختبار المجال وذلك بقانون المتراجحة نجد:

$$f(0).f(2) < 0 \Rightarrow \text{محقق} \Rightarrow \text{يوجد حل}$$

فنقسم المجال الى [0,1]and[1,2] ....

K	a_k	$C_k=X_k$	b_k	$F(x_k=c_k)$
0	0.0	1.0	2.0	**-0.158529**
1	1.0	1.5	2.0	**F(1.5)=0.496242**
:	:	:	:	:

لوأردنا حساي الخطوة ℓ_{31} نقوم بـ : $\ell_{31} \le \frac{2-0}{2^{31+1}} \approx 4.656612 \times 10^{-10}$

مثال:

$$P_{1000} = 2.00398714$$

$$P_{1001} = 2.00398317$$

$$P_{1002} = 2.00397921$$

الخطأ المطلق :

$|P - P_k|$ حيث : P الحل الفعلي و k : الخطوة

الخطأ المرحلي بين قيمتين : $|P_{1000} - P_{1001}| \quad , \quad |P_{1001} - P_{1002}|$

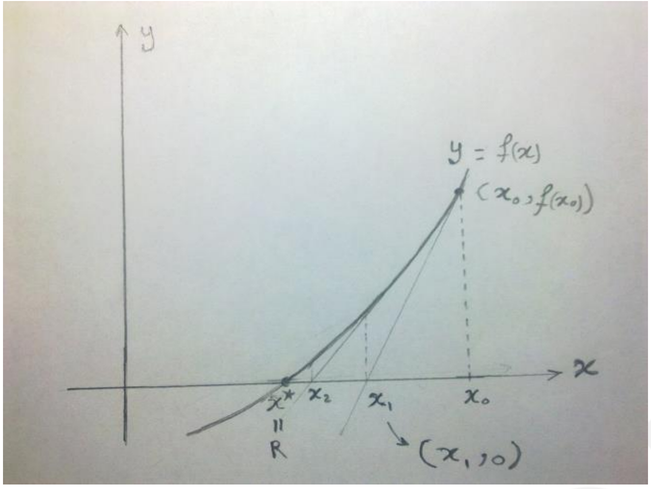
طريقة جديدة في حل المعادلة اللاخطية :

طريقة نيوتن (المماسات): [نيوتن -رافسون]

سنقوم بالبحث عن حل للمعادلة

$f(x) = 0$ ونفرض أن : $x = x^* = R$

X_0 تعطى وتسمى نقطة البدء



$$m = f'(x_0)$$

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

ومن خلال عملية تبسيط للمعادلة:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

نكرر العملية حتى نصل إلى صيغة نيوتن التكرارية :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} : \lim_{n\to\infty} x_n = R = x^*$$

أذاً صيغة نيوتن التكرارية :

معطاة X_0 $\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad$ $n:1,2,3,4\ldots\ldots\ldots$،

بعض الأمور الخاصة بصيغة نيوتن :

- يمكن أن نحصل على هذه الصيغة التكرارية من منشور تايلور في جوار x_0
- يجب أن يكون $f'(x)$ موجود وأيضا $f'(x)$ في مجال العمل $f'(x) \neq 0$
- الصيغة المعدلة لنيوتن في حالة الجذور المكررة:

لتكن (P) هي مرات تكرار الجذر (الحل) بالتالي أن الصيغة التكرارية ستكون :

$$\begin{cases} x_0 & \text{معطاة} \\ x_{n+1} = x_n - p\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ n = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

- لو كان $f'(x_n) \approx 0$ من الأفضل افتراض مايلي: $f'(x_n) = f'(x_0)$

$$\begin{cases} x_0 & \text{معطاة} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f('(x_0)} \\ n = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

مثال:

$f(x) = x^2$

$R = x^* = 0$ (الحل الفعلي)

$p = 2$ (حيث p يمثل عدد مرات تكرار الجذر)

أي $x^* = 0$ هو جذر مضاعف

نميز حالتين :

أ. استخدام الصيغة المعدلة:

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{x_n^2}{2x_n} = x_n - x_n = 0$$

ب. استخدام الصيغة الأساسية لنيوتن:

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} = \frac{x_n}{2}$$

إذاً كل قيمة جديدة ستكون نصف ما قبلها

و ستكون الصيغة التكرارية بالشكل التالي:

$$\begin{cases} x_0 & \text{معطاة} \\ x_{(n+1)} = \dfrac{x_n}{2} \\ n = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

بافتراض $x_0 = 1$ يكون

$$x_1 = \frac{x_0}{2} = 0.5$$
$$x_2 = \frac{0.5}{2} = 0.25$$
$$x_3 = 0.125$$

و منه نستنتج أنّ : $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

• لو طلب الجذر التربيعي من المرتبة P للعدد الحقيقي a و نريد أن نطبق طريقة نيوتن :

$\sqrt[P]{a}$ حيث :

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \in \mathbb{R} \\ 1 < P < \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي مثلاً إيجاد :

$$\left(\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \dots\right)$$

نحن لدينا $x = \sqrt[P]{a}$

$$\Rightarrow x^P = a$$
$$f(x) = x^P - a = 0$$
$$f'(x) = P\,x^{P-1}$$

فتكون الصيغة التكرارية :

$$\begin{cases} x_0 & \text{معطاة} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^P - a}{P\,x_n^{P-1}} \\ n = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

•**حالة خاصة :** إذا كان $a = 2\,, P = 2$:

(أي أصبحنا نبحث عن $\sqrt{2}$)

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

إذاً الصيغة التكرارية لإيجاد الجذر التربيعي ل $\sqrt{2}$ هي :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ n = 0,1,2,3,\dots.. \end{cases}$$

من أجل $x_0 = 1$:

$$x_1 = 0.5 + \frac{1}{1} = 1.5$$
$$x_2 = \frac{1.5}{2} + \frac{1}{1.5} = 1.416\dots$$
$$x_3 = \frac{1.416\dots}{2} + \frac{1}{1.416\dots} = 1.414\dots$$

نلاحظ أنه كلما أخذنا قيمة جديدة فإنها تكون أقرب للقيمة الفعلية : $\sqrt{2} = 1.4142\dots$

تمرين : أوجد الجذر الخامس للعدد ١٢ من أجل $x_0 = 1.5$:

الحل :

$$x = \sqrt[5]{12} \Rightarrow x^5 = 12 \Rightarrow x^5 - 12 = 0$$
$$f(x) = x^5 - 12$$

لدينا $x_0 = 1.5$

إذاً حسب المثال السابق يكون :

$$x_1 = 1.6741$$
$$x_2 = 1.6448$$
$$x_3 = 1.6438$$

ونبقى نأخذ الفروق حتى الدرجة المطلوبة للدقة (k) : $\varepsilon = 10^{-k}$

ملاحظة : يمكن استخدام طريقة نيوتن في إيجاد $\max(f(x))\ ,\min(f(x))$

حسب طرق الأمثليات .حيث $\min[-f(x)] = \max[f(x)]$

الأبطال لا يصنعون في صالات التدريب، الأبطال يصنعون من أشياء عميقة في داخلهم هي :الإرادة والحلم والرؤية

محمد علي كلاي